Juegos de negociación

Clara Ponsati Obiols*

1. Introducción

Este capítulo presenta una panorámica de la literatura de teoría de juegos que analiza problemas de negociación.

Una negociación puede surgir cuando un grupo de individuos pueden cooperar para beneficio mutuo. Negociando, los individuos intentan ponerse de acuerdo sobre los términos en los que cada uno de ellos va a cooperar. En general, las preferencias de los individuos ante los distintos acuerdos posibles no coinciden. Es decir, en una negociación se combinan aspectos de cooperación y de conflicto: se trata, claramente, de una situación que cabe considerar como un juego.

Las situaciones que pueden describirse como un problema de negociación son muy frecuentes y de indudable interés para la Economía y otras Ciencias Sociales. Hay multitud de ejemplos. Enumeraremos algunos: el reparto de un pastel, la asignación de tareas domésticas en una familia, la búsqueda de un precio mutuamente aceptable para la compraventa de un objeto, las conversaciones de paz entre dos países en guerra, etc. Tradicionalmente, la opinión mayoritaria entre los economistas ha sido que los resultados de los procesos de negociación eran intrínsicamente indeterminados. En algunos casos concretos se apelaba vagamente al «poder de negociación» de las partes, una expresión cuyo significado permanecía oscuro.

La teoría de juegos ha dado lugar a modelos del proceso de negociación cuyo resultado no es indeterminado, y para los cuales la expresión «poder de negociación» adquiere un significado preciso.

En cualquier negociación de una cierta complejidad, gran parte del tiempo y energía de los negociadores se dedica a la búsqueda de «nuevas soluciones». Es decir, el conjunto de acuerdos posibles no es totalmente conocido al empezar la negociación, y puede llegarse a un acuerdo sin que éste haya sido explorado totalmente. Por ejemplo, una empresa puede descubrir que sus empleados están dispuestos a aceptar una reducción salarial a cambio de ciertas garantías de estabilidad de empleo, un comprador puede aceptar un precio mayor a cambio de que le entreguen el producto a domicilio, etc. Por otra parte, una negociación puede presentarse como un problema puramente distributivo, es decir, un acuerdo más satisfactorio para una parte es necesariamente peor para la otra.

Para analizar un problema de negociación en el marco de la teoría de juegos es necesario imponer simplificaciones importantes respecto a las negociaciones

---

* Bell Communications Research, Inc.

en la «vida real». La primera gran abstracción que impone la teoría de juegos consiste en analizar básicamente los aspectos distributivos del problema de negociación. Supondremos que las partes conocen totalmente el contenido del conjunto de acuerdos posibles, que denominaremos X. Un elemento $x \in X$ especifica todas las consecuencias físicas que tal acuerdo implica para ambas partes. Por ejemplo, en la negociación sobre el reparto de un pastel, un acuerdo x especificaría qué porción se asigna a cada parte; en la negociación para repartir las tareas domésticas en una familia, un acuerdo x especificaría completamente las obligaciones de cada individuo, etc.

Otros elementos que pueden ser relevantes para analizar una negociación bajo la forma de un juego son las preferencias de los individuos sobre el conjunto X, su actitud hacia el riesgo, sus preferencias intertemporales, el procedimiento de negociación (por ejemplo, quién ofrece a quién, cuándo, etc.), y otros aspectos del contexto en el que se realiza la negociación (por ejemplo, la existencia de sucesos aleatorios que pueden interrumpir la negociación).

El estudio de juegos de negociación se ha llevado a cabo desde dos enfoques claramente diferenciados: El enfoque estático-axiomático, y el enfoque secuencial-estratégico. El enfoque estático-axiomático puede interpretarse como el estudio del problema de negociación desde el punto de vista de un árbitro que desea proponer una solución aceptable para ambas partes teniendo en cuenta las posibilidades estratégicas de cada jugador. Por su parte, el enfoque secuencial-estratégico analiza el problema como un juego no cooperativo y se plantea preguntas del tipo: ¿Va a haber un acuerdo?, ¿cuándo?, ¿en qué términos?, etc.

El enfoque estático-axiomático, describe un problema de negociación exclusivamente a través de un par de funciones de utilidad u_1 y u_2, que representan las preferencias de los individuos sobre el conjunto X, y un par de niveles de utilidad que representan la utilidad que cada individuo puede conseguir sin la cooperación de su oponente, el «status quo». Formalmente, una negociación es un par (S, s_0), donde $S = \{u_1(x), u_2(x) : x \in X\}$ es el conjunto de acuerdos posibles medidos en unidades de utilidad y $s_0 \in S$ es el par de utilidades que los jugadores obtienen en el «status quo». En este contexto una solución para el juego de negociación es, en palabras de Nash (1953), «una determinación de la cantidad de utilidad que cada individuo puede esperar de la situación, o mejor, una determinación de cuán valiosa es para cada individuo esta oportunidad de negociar». Para caracterizar la solución se enuncian una serie de axiomas que parece razonable exigirle y se demuestra que hay un único par de utilidades consistente con tales axiomas. En la sección 2 presentamos una breve descripción del modelo axiomático de Nash (1950, 1953).

La necesidad de completar el análisis de los juegos de negociación con un enfoque estratégico, fue planteada por Nash al mismo tiempo que proponía su solución axiomática. Sin embargo, las contribuciones más importantes en este frente, deberían esperar los avances en la teoría de juegos que siguieron a la propuesta del concepto de Equilibrio Perfecto en los Subjuegos (véase el capítulo 2). En particular, el punto de partida del desarrollo reciente del enfoque secuencial-estratégico es modelo de Rubinstein (1982) que presentamos en la sección 3.

Al contrario que el enfoque axiomático, el enfoque secuencial-estratégico se propone tener en cuenta explícitamente el procedimiento y el contexto de la negociación. Un proceso de negociación se describe como un juego no cooperativo cuya forma extensiva viene determinada por el procedimiento y el contexto de cada negociación. Con este enfoque, el análisis de la solución consiste la caracterización de estrategias de equilibrio.

No todas las negociaciones se ajustan al mismo procedimiento ni tienen lugar en el mismo contexto. Es más, en muchos casos los individuos consideran que el procedimiento y el contexto son, a su vez, susceptibles de negociación y manipulación. Por ejemplo, la discusión sobre el calendario y orden del día de una negociación es siempre un paso previo importante. Puesto que no hay unas reglas del juego comunes a toda negociación, cualquier forma extensiva que propongamos será en principio arbitraria. En este capítulo no entraremos en la cuestión de por qué o cómo los procesos de negociación toman una forma u otra, ni en cuáles son los procedimientos más eficientes en algún sentido. El lector interesado en este tema puede consultar Myerson and Satterthwaite (1983) y Cramton (1985).

Rubinstein presenta un modelo del proceso de negociación en el que los individuos, a lo largo del tiempo y sin límite prefijado, alternan propuestas sobre cómo repartirse un pastel. Cualquier reparto del pastel puede surgir como el resultado de un Equilibrio de Nash (EN). Basta con que un jugador elija la estrategia consistente en pedir lo que le corresponde en tal reparto y, en cualquier período futuro, pedir todo el pastel. Sin embargo, si los individuos son impacientes, entonces el juego tiene un único Equilibrio Perfecto en los Subjuegos (EPS). En la sección 3 veremos que la amenaza de pedir todo el pastel en el futuro no es creíble. Eliminando los equilibrios que se sostienen por medio de amenazas increíbles, eliminamos todos los resultados posibles excepto uno. En este único EPS, los individuos llegan a un acuerdo en el primer período y la división del pastel depende solamente del grado de impaciencia de cada jugador y de quién hace la primera propuesta. Cuando las propuestas pueden sucederse inmediatamente unas a otras, la porción asignada a cada jugador depende solamente de su nivel de impaciencia relativa y no del orden en que el juego empieza. En particular, si ambos jugadores son igualmente impacientes, en el límite, el resultado converge en la Solución de Nash.

Rubinstein supone que los individuos tienen información completa sobre las características de sus contrincantes y, en el único EPS, el acuerdo ocurre en el primer período. Este resultado choca claramente con la percepción de que, en realidad, todas negociaciones duran algún tiempo y en algunos casos experimentan retrasos sustanciales o fracasan. Para explorar el problema de los retrasos en la negociación, muchos autores han estudiado modelos en lo que se relaja el supuesto de información completa[1].

En el resto del capítulo presentamos un resumen de la literatura que se ocupa de las negociaciones como juegos con información privada. Es decir, los individuos conocen perfectamente cuáles son los acuerdos posibles, y cuáles son sus preferencias, pero su conocimiento sobre las preferencias de sus oponentes

[1] Véase, Fudenberg, Levine y Tirole (1985), Fudenberg y Tirole (1983), Grossman y Perry (1986), Perry (1986), y Sobel y Takahashi (1983).

es meramente probabilístico (véase el capítulo IV). Por ejemplo, el vendedor de un producto puede desconocer el precio máximo que un comprador está dispuesto a pagar, una empresa puede desconocer cuántos días pueden seguir en huelga sus empleados antes de agotar el fondo de reserva, etc.

En la sección 4 analizaremos un modelo en el que un vendedor y un comprador tienen que acordar un precio al que intercambiar un objeto. El coste del objeto para el vendedor es 0 (la interpretación es que el objeto ya ha sido producido en el momento de negociar el precio). El beneficio para el comprador puede tomar distintos valores pero solamente él sabe cuál ha tomado en realidad. En este nuevo contexto, el concepto de equilibrio análogo al EPS es el concepto de Equilibrio Secuencial (ES) (véase el capítulo II). Sin embargo, el resultado de unicidad de Rubinstein no tiene análogo: en general, hay un continuo de Equilibrios Secuenciales (ES).

El problema de la multiplicidad de equilibrios reside en el concepto mismo de ES. En un ES, cuando la Regla de Bayes no restringe sus conjeturas, los individuos pueden conjeturar casi cualquier cosa. Precisamente las situaciones en las que la Regla de Bayes no puede aplicarse surgen cuando un individuo observa que su contrincante ha elegido una acción que no es de equilibrio. Entonces surge la posibilidad de que cualquier amenaza de un jugador sea creíble en la medida que sus conjeturas la sostienen. Para obtener resultados más satisfactorios es necesario restringir la forma extensiva del juego, o refinar aún más el concepto de equilibrio.

Parte de la literatura restringe el juego de forma que el vendedor (el jugador desinformado) hace todas las propuestas y el comprador (el jugador que posee información privada) se limita a aceptarlas o recharzarlas. Si el vendedor está seguro de que el beneficio del comprador es estríctamente positivo, entonces existe un único ES. En este ES, el vendedor propone una sucesión decreciente de precios, y termina, en un número finito de períodos, proponiendo el menor precio posible (esto es, el mínimo valor que puede tomar beneficio del comprador). Por su parte, el comprador, anticipando racionalmente las propuestas del vendedor y dependiendo del valor que tome su beneficio, acepta cuando la utilidad que le proporciona el acuerdo excede al valor presente su utilidad esperada en el futuro. Por lo tanto, puesto que los compradores cuyo beneficio es bajo prefieren esperar varios períodos antes de aceptar la propuesta del vendedor, los acuerdos no son inmediatos.

Otra manera de enfocar el problema ha sido proponer criterios para seleccionar uno de los múltiples ES. Grossman y Perry (1986) proponen un refinamiento del concepto de ES, el Equilibrio Secuencial Perfecto, en el que se restringen de forma muy severa las conjeturas de los jugadores. Aunque puede no existir, si existe, es único y exhibe características similares a las que se obtienen cuando el comprador no puede hacer propuestas.

Los modelos en los que solamente un jugador posee información privada dan lugar a equilibrios en los que el acuerdo no es inmediato. Sin embargo, cabe preguntarse hasta qué punto proporcionan una estructura robusta para analizar retrasos en el proceso de negociación en términos de tiempo real. Los resultados presentados por Gul, Sonnenschein y Wilson (1985) y Gul y Sonnenschein (1985) dan motivos para dudarlo. Restringiéndose a ES que satisfacen ciertas condiciones de estacionariedad, Gul, Sonnenschein y Wilson (1985) y Gul y Sonnenschein (1985) demuestran que en el límite, cuando el intervalo de tiempo real entre una propuesta y otra es arbitrariamente breve, el resultado de la negociación es único: el acuerdo es inmediato y en los términos más favorables para el jugador que posee información privada.

En la sección 5 presentamos algunos resultados que se obtienen para el caso en que ambos jugadores poseen información privada. Desde luego, motivación empírica y teórica para este tipo de modelos no falta. Sin embargo, el análisis es extremadamente complejo y, hasta el momento, la literatura presenta muy pocos resultados. Algunos resultados se han obtenido reduciendo el problema de negociación de forma que hay solamente dos acuerdos posibles. Es decir, lo único que los jugadores deben decidir es si insistir proponiendo el acuerdo que les es más favorables o ceder. Si la probabilidad de que ambos jugadores no estén nunca dispuestos a ceder es positiva, hay un único Equilibrio de Nash. En promedio, los acuerdos tienen lugar con retraso, independientemente de la duración de un período entre propuestas.

2. La Solución de Nash

Consideremos a dos individuos que pueden intercambiar bienes pero que no poseen dinero para facilitar el intercambio. Ambos tienen una dotación inicial de bienes y va a haber intercambio si y solamente si ambos lo consienten. Suponemos que el conjunto de acuerdos posibles, X, contiene todas las asignaciones factibles de los bienes y todas las loterías cuyos resultados son asignaciones factibles de bienes. Suponemos que las preferencias de los individuos sobre las distintas asignaciones de bienes pueden representarse por funciones de utilidad von Neuman-Morgenstern, u_1 y u_2. La negociación se representa por un par (S, s_0), donde $S = \{u_1(x), u_2(x) : x \in X\}$ y $s_0 \in S$. El par (s_{10}, s_{20}), el «status quo», denota los niveles de utilidad que cada individuo puede conseguir en el supuesto de que no haya intercambio. S es convexo, acotado y cerrado. Supondremos que el conjunto X contiene algún acuerdo que proporciona un nivel de utilidad superior a s_0 para ambos individuos.

Una solución es una regla de decisión que asigna un acuerdo a cada problema de negociación. El enfoque axiomático consiste en enunciar una serie de axiomas que parece razonable exigir a la solución y demostrar que para cada negociación hay un único par de utilidades consistente con tales axiomas.

¿Qué características debe satisfacer una solución para que los individuos estén dispuestos a aceptarla? Nash propone las siguientes condiciones:

I. *Invariancia respecto a origen y unidades*

Sean (S, s_0) y (S', s'_0) dos versiones del mismo problema de negociación. Es decir, (S, s_0) se puede transformar en (S', s'_0) cambiando solamente en las unidades y el origen de las funciones de utilidad. Entonces, dada la solución de (S, s_0), con el mismo cambio de unidades y origen de las funciones de utilidad, debemos obtener la solución de (S', s'_0).

II. *Eficiencia*

La solución tiene que ser factible. Además, no puede haber otro punto en S que sea preferido a la solución por lo menos por uno de los jugadores.

III. *Independencia de las alternativas irrelevantes*

Consideremos dos negociaciones que tienen el mismo «status quo» (S, s_0) y (S', s_0). Supongamos que S es un subconjunto de S'. Si la solución de (S', s_0) es un elemento de S, entonces (S, s_0) y (S', s_0) deben tener la misma solución.

IV. *Simetría*

Consideremos una negociación (S, s_0) tal que

a) $s_{10} = s_{20}$,
b) si $(x, y) \in S$, entonces $(y, x) \in S$,

entonces la solución es simétrica (se trata de un punto de la forma (z, z)).

Consideremos ahora la Solución de Nash. Es la que surge al ejecutar las siguientes operaciones. Primero trasladamos el origen de las utilidades de forma que el punto s_0 se transforme en el punto $(0, 0)$. Sea S' el conjunto que resulta de esta traslación. Sea (u_1^*, u_2^*) el punto que maximiza el producto de las utilidades $u_1 u_2$ en el conjunto S'. El par (u_1^*, u_2^*) es la solución de la negociación $(S'(0, 0))$. Invirtiendo la primera operación, obtenemos la solución de (S, s_0). Es decir, la Solución de Nash para el problema de negociación (S, s_0) es el par $(u_1, u_2) \in S$, que maximiza la función $(u_1 - s_{10})(u_2 - s_{20})$ sujeto a la restricción $u_i \geqslant s_{i0}$, para $i = 1, 2$.

Veamos, de forma muy esquemática, el argumento que demuestra que la única solución compatible con los axiomas I-IV es la Solución de Nash. Sea S'' el conjunto que se obtiene cambiando las unidades de utilidad en S' de forma que (u_1^*, u_2^*) corresponda al punto $(1, 1)$. Considérese un conjunto simétrico, S''', que contenga S'' y $(1, 1)$ y ningún otro punto (u_1, u_2) tal que $u_i \geqslant 1$. Dados los axiomas II y IV $(1, 1)$ es la única solución de $(S'''(0, 0))$. Dado III $(1, 1)$ también debe ser una solución de $(S''(0, 0))$. Por lo tanto, el axioma I implica que (u_1^*, u_2^*) es una solución de $(S'(0, 0))$ y $(u_1^* + s_{10}, u_2^* + s_{20})$ es una solución de (S, s_0). Se trata de la única solución porque si para alguna versión de (S, s_0) existe alguna otra solución, entonces podemos contradecir la construcción que acabamos de hacer.

¿Hasta qué punto son razonables los axiomas I-IV? En particular, los axiomas III (independencia de las alternativas irrelevantes) y IV (simetría) parecen difíciles de defender desde un punto de vista puramente de teoría de juegos. El axioma de independencia de las alternativas irrelevantes parece inspirado por un supuesto de racionalidad colectiva más normativo que estratégico. Varios autores han propuesto axiomas alternativos o soluciones distintas. El lector interesado puede consultar Luce y Raiffa (1957) (capítulo VI), Roth (1979) y Binmore (1981-I).

El axioma de simetría intenta reflejar el supuesto de que los individuos tienen el mismo «poder de negociación». Eliminando el axioma de simetría, obtenemos la Solución de Nash Generalizada para cada $\tau \in [0, 1]$ (u_1^τ, u_2^τ). Se trata del par que maximiza $(u_1 - s_{10})^\tau (u_2 - s_{20})^{1-\tau}$ sujeto a $(u_1, u_2) \in S$ y $u_i \geqslant s_{i0}$, donde τ puede interpretarse como un parámetro indicativo del «poder de negociación» de cada parte.

3. El modelo de Rubinstein

Dos individuos, a los que llamaremos 1 y 2, deben ponerse de acuerdo en cómo repartirse un pastel. Ambos desean obtener la mayor cantidad de pastel posible. Sin embargo, no van a poder consumir el pastel hasta que haya un acuerdo sobre cómo repartirlo. Podemos representar el conjunto de acuerdos posibles por $X = [0, 1]$, donde $x \in X$ representa la porción del pastel que se asigna a 1 (2 se queda con el resto, una porción $(1 - x)$).

La negociación se desarrolla según el árbol que se presenta en la figura 1. El tiempo se mide en unidades discretas fijadas exógenamente que denominaremos períodos, $t = 0, 1, 2, \ldots$. El jugador 1 empieza eligiendo un valor $x \in [0, 1]$ y proponiéndoselo al jugador 2. Este puede aceptar o rechazar la propuesta. Si la propuesta es aceptada el juego termina: el acuerdo es x. En caso contrario, el juego sigue. En el siguiente período, 2 elige una propuesta y 1 la acepta o la rechaza. Este proceso sigue, sin límite de tiempo prefijado, hasta que algún jugador acepta la propuesta de su oponente: en los períodos pares (resp. impares), 1 (resp. 2) propone un acuerdo x, que 2 (resp. 1) puede aceptar o rechazar.

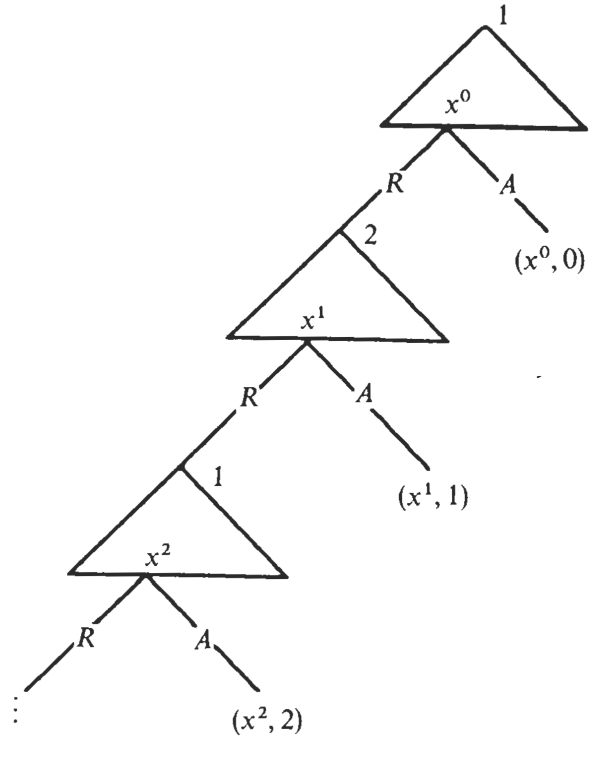

FIGURA 1

Las preferencias de los jugadores sobre la cantidad de pastel, sin tener en cuenta la fecha en que se consume, pueden representarse por una función de utilidad von Neuman-Morgenstern u_i, $i = 1, 2$. Cuando tenemos en cuenta, dada cualquier cantidad de pastel, la fecha en que ésta se consume ambos jugadores prefieren consumirla cuanto antes mejor. Vamos a suponer que esta impaciencia toma la forma de un factor de descuento. Un resultado de la negociación es un par (x, n) que denota un acuerdo y su fecha. Los jugadores tienen las siguientes preferencias sobre el conjunto de resultados: Para el jugador 1, el resultado (x, n) es preferido o indiferente al resultado (z, m), si y solamente si, $u_1(x)\delta_1^n \geqslant u_2(z)\delta_1^m$. Análogamente, para el jugador 2, el resultado (x, n) es preferido o indiferente al resultado (z, m), si y solamente si, $u_2(1 - x)\delta_2^n \geqslant u_2(1 - z)\delta_2^m$, donde $0 < \delta_1 < 1$ y $0 < \delta_2 < 1$. Para simplificar la exposición, supondremos que $u_1(z) = u_2(z) = z$, pero el lector debe tener presente que los resultados son válidos en su forma más general.

Una estrategia para el jugador 1 (resp. 2) es una función que asigna una propuesta a cada fecha impar (resp. par) y una decisión sobre qué propuestas aceptar en los períodos pares (resp. impares).

En primer lugar vamos a ver que, para cualquier (x, n), existe un par de estrategias, una para cada jugador, que forman un Equilibrio de Nash con dicha asignación como resultado. Supongamos que para todo $t \neq n$ ambos jugadores piden todo el pastel o rechazan cualquier partición que no les asigna todo el pastel. En el período n (supongamos sin pérdida de generalidad que es par) el jugador 1 propone x y el jugador 2 acepta cualquier $z \leqslant x$. Veremos que este par de estrategias, que genera el resultado (x, n), es un Equilibrio de Nash. Dada la estrategia del jugador 2, considérese cualquier estrategia distinta del jugador 1: O bien no se llega a ningún acuerdo, o se llega a un acuerdo en el que 1 no obtiene nada, o se llega a un acuerdo $z \leqslant x$ en el período n. Ninguna de estas tres posibilidades da al jugador 1 una utilidad mayor que $\delta_1^n x$. Por otra parte, dada la estrategia del jugador 1, considérese cualquier estrategia distinta del jugador 2. O bien no se llega a un acuerdo, o bien se llega a un acuerdo en el que 1 se queda con todo el pastel. Por lo tanto, puesto que no es posible desviarse unilateralmente de la estrategia propuesta y obtener un aumento en utilidad, el par de estrategias propuesto forma un Equilibrio de Nash.

El equilibrio que acabamos de describir se sostiene gracias a que los jugadores amenazan con pedir todo el pastel en cada período excepto n. Esta amenaza no es creíble. Supongamos que en el período $n - 1$ el jugador 2 propone $z \in (\delta_1 x, x)$, entonces 1 preferiría no ejecutar su amenaza: aceptando z obtiene una cantidad de pastel mayor que la que podría obtener manteniendo su estrategia. Este razonamiento sugiere que restringir el concepto de equilibrio para eliminar amenazas increíbles puede reducir el conjunto de resultados posibles. Efectivamente, existe solamente un par de estrategias que forman un Equilibrio Perfecto en Subjuegos (EPS).

Proposición 1 (Rubinstein, 1982)

Sea (x^*, y^*) *la (¡única!) solución al sistema de ecuaciones*

$$y^* = \delta_1 x^*$$
$$(1 - x^*) = \delta_2(1 - y^*)$$

entonces el único EPS es el par de estrategias en el que 1 (resp. 2) propone x^* *(resp.* y^**) siempre que es su turno y acepta solamente propuestas* $y \geqslant y^*(x \leqslant x^*)$.

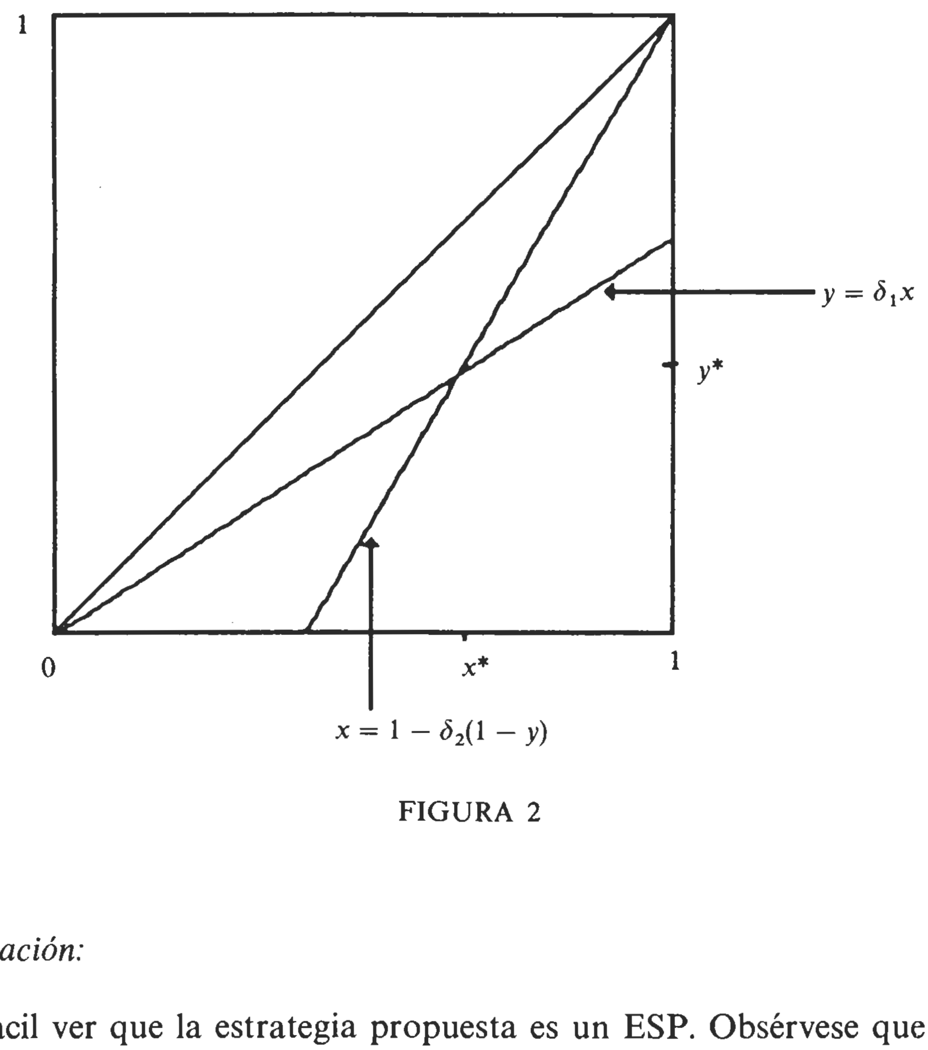

FIGURA 2

Demostración:

Es fácil ver que la estrategia propuesta es un ESP. Obsérvese que no existe ninguna propuesta $z > x^*$ que 2 prefiera aceptar ya que puede obtener $\delta_2(1 - y^*) = (1 - x^*) > (1 - z)$ rechazando z.

Veamos que, efectivamente, el ESP es único. Nótese que cualquier subjuego es equivalente o bien al juego en el que 1 empieza haciendo propuestas o al juego en el que empieza 2. Para cada resultado (x, n), sea $V_{in}(x)$, el valor presente para el jugador i del acuerdo que, tomado de inmediato, le deja indiferente con respecto al resultado (x, n). Es decir, $V_{1n}(x) = \delta_1^n x$ y $(1 - V_{2n}(x)) = \delta_2^n(1 - x)$. Sea M_1 (resp. M_2) el supremo del valor presente de todos los resultados que pueden surgir en un ESP en el que 1 (resp. 2) empieza el juego. Sea m_1 (resp. m_2) el ínfimo del valor presente de todos los resultados que pueden surgir en un ESP en el que 1 (resp. 2) empieza el juego.

$M_2 = \delta_1 M_1$

En primer lugar veamos que $M_2 \leqslant \delta_1 M_1$. En un ESP, 1 debe de aceptar cualquier propuesta mayor que $\delta_1 M_1$. Sea v_2 el valor presente para 2 del resultado de algún ESP en el que 2 empieza. Si $v_2 > \delta_1 M_1$, entonces 2 podría aumentar su utilidad haciendo una propuesta z tal que $\delta_1 M_1 < z < u_2$.

Seguidamente veamos que $M_2 \geqslant \delta_1 M_1$. En cualquier ESP en el que 1 empieza, sea v_1 el valor presente del resultado para 1. Para el juego en el que 2 empieza podemos construir un ESP como sigue: en el primer período 2 propone $z \in (\delta_1 v_1, v_1)$ y 1 acepta cualquier $z \geqslant \delta_1 v_1$.

$(1 - M_1) \geqslant \delta_2(1 - M_2)$

Puesto que 1 acepta $\delta_1 M_1$ y puesto que hemos probado que $M_2 = \delta_1 M_1$, en cualquier juego en el que él empieza, 2 puede conseguir M_2. Por lo tanto, en un EPS no puede ocurrir que 1 proponga $x > 1 - \delta_2(1 - M_2)$, porque 2 (pudiendo obtener M_2) rechazaría tal propuesta.

En consecuencia, es necesario que $M_2 = \delta_1 M_1$ $(1 - M_1) \geqslant \delta_2(1 - M_2)$. Puesto que $x^* \leqslant M_1$, la figura 2 muestra que $M_1 = x^*$ y $M_2 = y^*$.

Un razonamiento análogo demuestra que $\delta_2(1 - m_1) = (1 - m_2)$, y $m_2 \geqslant \delta_1 m_1$. Y usando la figura 2 obtenemos $m_1 = x^*$ y $m_2 = y^*$.

Características del EPS

A) El acuerdo ocurre en el primer período. Puesto que el jugador 1 propone x^* en el primer período, el jugador 2 acepta cualquier propuesta $x \leqslant x^*$, el jugador 2 acepta x^* en el primer período.

B) Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$x^* = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}$$

$$y^* = \frac{\delta_1(1 - \delta_2)}{1 - \delta_1 \delta_2}$$

donde $x^* > y^*$, esto es, dado cualquier par (δ_1, δ_2), hacer la primera propuesta es mejor que responder a ésta. En particular, si los individuos son igualmente pacientes, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, entonces

$$x^* = \frac{1}{1 + \delta} > \frac{1}{2} > y^* = \frac{\delta}{1 + \delta}$$

La ventaja de ser el primero se obtiene gracias a que el contrincante es impaciente. Para cada acuerdo que pueda conseguir en el siguiente período si rechaza la propuesta del período presente, el contrincante está dispuesto a ceder algo a cambio de adelantar el acuerdo un período.

C) Ser paciente es beneficioso. Considérese $\delta_1 < \delta'_1$, queda claro en la figura 3 que $x^*(\delta_1) < x^*(\delta'_1)$.

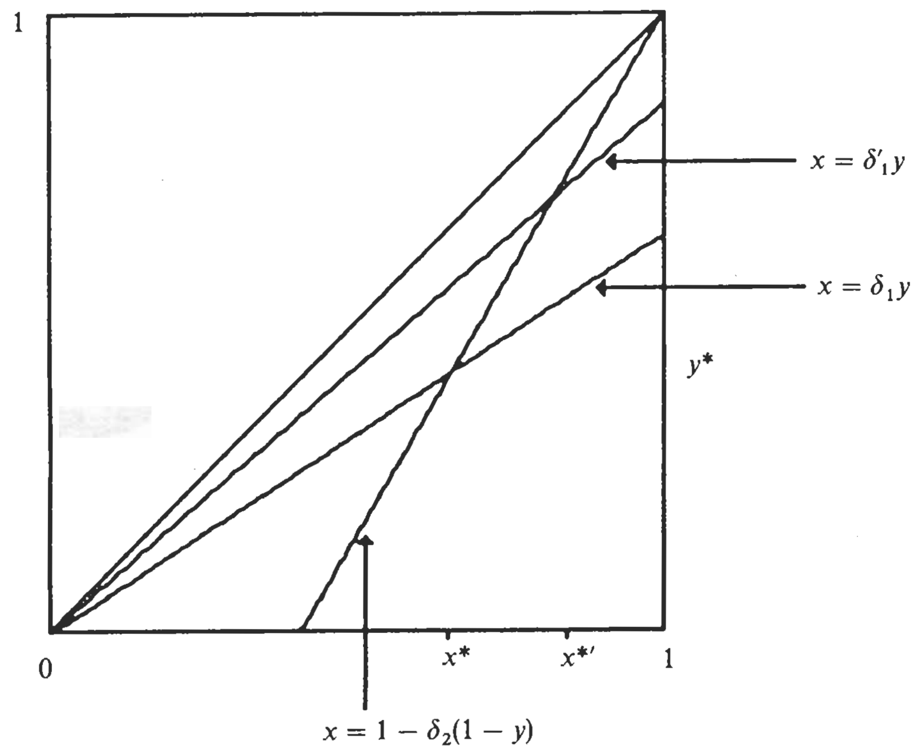

FIGURA 3

Es decir, cuanto más paciente es el contrincante menor es la ventaja de ser el primero. Esto es, si el contrincante tiene más tendencia a rechazar propuestas a cambio de disfrutar de la ventaja de ser primero en el período siguiente (porque esperar un período es menos costoso), entonces la primera propuesta debe de ser menor.

D) Cuando las ofertas se suceden instantáneamente, la ventaja de ser el primero desaparece y el resultado se aproxima a la Solución de Nash Generalizada. Considérese el problema en tiempo real, $t \in [0, \infty)$. Sea Δ la duración de un período, entonces la negociación toma lugar en los períodos $t_1 = 0$, $t_2 = \Delta$, $t_3 = 2\Delta$, etc. Las preferencias de los individuos sobre resultados (x, t) medidos en tiempo real se representan por xe^{-r1t} y $(1 - x)e^{-r2t}$, y $\delta_i = e^{-ri\Delta}$, donde $\delta_i = e^{-ri\Delta}$. Consideremos la sucesión de resultados que se obtiene cuando las partes pueden alternar ofertas cada día, cada hora, cada minuto, etc. Nos interesa conocer el límite de esta sucesión cuando el intervalo entre dos ofertas tiende a cero. Sustituyendo $\delta_i = e^{-ri\Delta}$ en x^* e y^* y tomando el límite cuando Δ tiende a cero obtenemos

$$\text{lím}_{\Delta \to 0}\, x^*(\Delta) = \frac{r_1}{r_2 + r_1}$$

$$\text{lím}_{\Delta \to 0}\, y^*(\Delta) = \frac{r_2}{r_2 + r_1}$$

Nótese que este reparto corresponde a la Solución de Nash Generalizada con parámetro $\tau = \frac{r_1}{r_2 + r_1}$ para el caso que las funciones de utilidad son lineales. En particular, si $r_2 = r_1$, el pastel se reparte en partes iguales. El resultado es general, véase Binmore (1980-II).

4. Modelos con información privada en un lado

El análisis de las situaciones de conflicto, retrasos, huelgas, etc., es un aspecto importante del estudio de los problemas de negociación. El modelo de Rubinstein no contribuye al análisis de estos aspectos porque predice que el acuerdo va a ser inmediato. Parece natural que para analizar negociaciones con retraso habrá que relajar el supuesto de que los individuos conocen perfectamente las características de sus contrincantes.

La idea básica que inspira los modelos de negociación con información privada es la siguiente. Si cada individuo conoce sus propias preferencias, pero tiene un conocimiento solamente probabilístico sobre las de su contrincante, entonces la negociación es un juego de información incompleta. En tal caso, el proceso de negociación es a la vez un proceso de adquisición de información.

Transmitir información de forma que sea creíble es costoso. Imaginemos a dos individuos negociando la compraventa de una bicicleta. El comprador desea convencer al vendedor de que el valor que él asigna a la bicicleta es bajo, para poder obtener un precio bajo. Pero el vendedor no va a dejarse convencer meramente con palabras. No basta con que el comprador le diga al vendedor «en realidad no necesito mucho la bicicleta y no te la voy a comprar si no me la dejas muy barata». Para ser convincente, el comprador debe apoyar sus palabras con hechos. Pasar unos días sin la bicicleta puede ser el mecanismo para ello, ya que un comprador que necesita la bicicleta desesperadamente no imitará este comportamiento.

En lo que sigue vamos a analizar el siguiente problema de negociación. Un jugador, el vendedor, puede producir un objeto indivisible cuyo consumo no le produce satisfacción. Para producir el objeto debe incurrir en un coste s. El otro jugador, el comprador, no puede producir el objeto, pero su consumo le produciría un beneficio b. El problema de negociación consiste en elegir un precio al que ambos estén dispuestos a intercambiar el objeto. El resultado de la negociación es un par (p, n), el precio y la fecha del acuerdo. Las preferencias de los individuos sobre el conjunto de pares (p, n) se representan por $u_1(p - s)\delta_1^n$ para el vendedor y $u_2(b - p)\delta_2^n$ para el comprador. Para simplificar la exposición supondremos, una vez más, que $u_1(z) = u_2(z) = z$ y además supondremos que $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

Si suponemos que los individuos conocen todos los valores de los parámetros s, b y δ estamos en el marco del modelo de Rubinstein.

En esta sección vamos a suponer que $s = 0$, pero b es una variable aleatoria cuya realización solamente el comprador conoce. La forma que toma el problema tiene la siguiente interpretación: el vendedor ya ha producido el objeto e incurrido en su coste cuando la negociación empieza. Supondremos que b tiene una distribución de probabilidad F, con densidad positiva, f, en el intervalo $[L, H]$. Todos los elementos del modelo, excepto la realización de la variable aleatoria b, que solamente el comprador observa, son de conocimiento compartido.

Consideremos primero que el procedimiento de la negociación sigue la estructura del modelo de Rubinstein: uno de los jugadores empieza haciendo una propuesta, el otro la acepta o la rechaza, si la rechaza hace una propuesta en el período siguiente, etc.

Puesto que el vendedor no conoce el valor de b, un elemento muy importante para determinar lo que es un equilibrio es el criterio que éste usa para revisar sus conjeturas sobre b. Al principio, el vendedor cree que b se distribuye según F. Para cada historia de la negociación, debe revisar sus conjeturas dado que ha observado dicha historia. Un *Equilibrio Secuencial* (ES) es un par de estrategias y una regla de revisión de las conjeturas que satisfacen lo siguiente para cada historia: la estrategia del comprador es óptima dada la estrategia del vendedor, y la estrategia del vendedor es óptima dada la estrategia del comprador y sus conjeturas (debidamente revisadas dada la historia). Y la revisión de las conjeturas se hace según la Regla de Bayes siempre que ésta se pueda aplicar.

Este concepto de equilibrio es la extensión natural para juegos con información incompleta del concepto de EPS. Sin embargo, no es tan efectivo a la hora de seleccionar la solución del modelo. El problema es el siguiente. Si a lo largo de una trayectoria de equilibrio hay sucesos que nunca ocurren, entonces no está claro qué es lo que un individuo racional debe conjeturar cuando observa uno de estos sucesos. Esto puede dar lugar a manipulaciones de las acciones del contrincante a través de la revisión de las conjeturas.

Vamos a ilustrar el problema con un ejemplo. Supongamos que el comprador hace la primera propuesta, y supongamos que $L > H\delta/(1 + \delta)$.

Considérese un par de estrategias y una regla de revisión de conjeturas que cumplan las siguientes condiciones. En el primer período el vendedor acepta cualquier precio $p \geqslant H\delta/(1 + \delta)$. Para cualquier valor b^* en el intervalo $[L, H]$, si el vendedor llega a la conclusión de que la probabilidad de que $b = b^*$ es 1, entonces sigue la estrategia del único EPS del juego de información completa (a la Rubinstein) en el que $b = b^*$ —proponer $b^*/(1 + \delta)$ y aceptar cualquier $p \geqslant b^*\delta/(1 + \delta)$. El vendedor revisa sus conjeturas de forma que, cuando observa una propuesta cuya probabilidad es 0, cree que la probabilidad de que $b = H$ es 1. El comprador propone $H\delta/(1 + \delta)$ en el primer período sea cual sea el valor de b.

Estas estrategias generan un ES cuyo resultado es $(H\delta/(1 + \delta), 0)$. El comprador no puede proponer ningún precio menor en el primer período y aumentar su utilidad. Si propone un precio menor, el vendedor creerá que $P(b = H) = 1$, rechazará la propuesta y propondrá $H/(1 + \delta)$ en el siguiente período.

Este ejemplo da idea de cómo construir un continuo de ES, muchos de ellos muy poco atractivos. Eligiendo la regla de revisión de conjeturas adecuadamente, para cualquier b^* podemos construir un ES cuyo resultado es $(b^*\delta/(1 + \delta), 0)$.

La literatura presenta dos líneas de ataque a los problemas relacionados con el uso del concepto de ES. La primera consiste en simplificar la forma extensiva del juego de forma que la Regla de Bayes pueda aplicarse siempre. La segunda, mucho más compleja, consiste en proponer restricciones sobre las reglas de revisión de conjeturas para refinar el concepto de equilibrio.

El vendedor hace todas las propuestas

Supongamos que el vendedor hace todas las propuestas y el comprador debe limitarse a aceptarlas o rechazarlas. Cuando el juego toma esta forma, puesto que para cada $p > L$ hay valores de b tales que el comprador indudablemente rechaza p, la revisión de las conjeturas del vendedor cuando el comprador rechaza un precio $p > L$ está siempre definida según la Regla de Bayes. La única circunstancia en que el vendedor puede observar que el comprador toma una acción que no es de equilibrio ocurre si éste acepta alguna propuesta que no debería de aceptar en equilibrio. Pero en este caso, las conjeturas del vendedor son irrelevantes: el juego ha terminado.

Los resultados que se obtienen con este modelo dependen crucialmente de si el vendedor tiene certidumbre de que el beneficio del comprador es estrictamente positivo, esto es $L > 0$, o no.

Si $L > 0$, entonces existe un único ES en el que el vendedor ofrece una sucesión decreciente de N precios, p_1, p_2, ..., p_N donde $p_N = L$. La negociación termina antes de $N + 1$ con probabilidad 1. Veremos como, dado que $p_N = L$, el valor de los precios p_1, ..., p_{N-1} queda determinado de forma única mediante un argumento de inducción hacia atrás.

No obstante, si $L = 0$, no hay una fecha máxima para la negociación y esto implica que hay muchas sucesiones de precios que pueden sostenerse en equilibrio. Nótese que suponer $L = 0$ es más natural que suponer $L > 0$ porque, en principio, cualquier comprador que espere un beneficio positivo va a estar dispuesto a negociar.

Veamos primero un par de resultados que se cumplen para todo $L \geqslant 0$.

Resultado 1

Considérese un ES y la sucesión de precios que el vendedor ofrece en este ES, $\{p_\tau\}$. Para cada fecha t, existe un valor $b_t \in (L, H)$ tal que, la distribución de probabilidad que el vendedor asigna a b dado que el comprador ha rechazado las *propuestas* $p_1, \ldots, p_{t-1}$*, es la distribución de probabilidad a priori* F*, truncada en el valor* b_t.

Este resultado es consecuencia de que, en cada período t, si un comprador cuyo beneficio es b está dispuesto a aceptar la propuesta p_t, entonces cualquier $b' > b$ acepta p_t. Considérese un ES. Sea $V_B(b, H_t)$ el valor esperado del juego en este ES para un comprador de tipo b, cuando ha observado la historia H_t (una historia H_t es una sucesión de propuestas, una para cada período desde 0 hasta t). Sea p_t la última propuesta que el comprador observa dada la historia H_t. Si un comprador cuyo beneficio es b está dispuesto a aceptar p_t, entonces $(b - p_t) \geqslant \delta V_B(b, H_t)$. Obsérvese que, puesto que para cualquier otro $b' \in [L, H]$ el comprador de tipo b puede imitar el comportamiento del comprador de tipo b', necesariamente $V_B(b', H_t) \leqslant V_B(b, H_t) + (b' - b)$. Por lo tanto, $(b' - p_t) > \delta V_B(b', H_t)$.

Resultado 2

En cualquier ES el vendedor no propone nunca un precio menor que L.

Considérese un ES. El valor esperado por el vendedor debe ser no-negativo, por lo tanto, en promedio, el valor esperado del comprador es menor que H.

Sea $V_B(b)$ el valor esperado del comprador cuyo beneficio es b. Para cualquier $b' > b$, $V_B(b') \leqslant V_B(b) + (b' - b)$ porque b puede imitar el comportamiento de b'. En particular, para $b = L$ y $b' = H$, dado que $V_B(b)$ es no decreciente en b, $V_B(L) \leqslant H$ y $V_B(H) \leqslant 2H - L$. Es decir, el vendedor propone $p = L - H$, el comprador acepta sea cual sea su beneficio. Esto nos proporciona una primera cota inferior para las propuestas del vendedor.

Puesto que cualquier b acepta $L - H$, entonces cualquier b acepta un precio algo mayor p tal que $L - p \geqslant \delta[L - (L - H)]$. Esto es, cualquier b acepta la propuesta $L - \delta H$. Podemos repetir el mismo argumento con otro precio p' aun algo mayor tal que $L - p' \geqslant \delta[L - (L - \delta H)]$. Esto es, cualquier b acepta la propuesta $L - \delta^2 H$. Recursivamente, para todo n, el comprador acepta $L - \delta^n H$ sea cual sea b. Por lo tanto, el vendedor no propone nunca un precio menor que L.

El siguiente resultado, que es crucial para probar que existe una única sucesión de precios de equilibrio, requiere el supuesto de que $L > 0$.

Resultado 3

Si $L > 0$*, existe un valor* N *(dependiendo de* δ*,* H*,* L *y* F*) tal que, en un ES, el comprador acepta alguna oferta del vendedor antes del período* $N + 1$.

Se trata de ver que, para cada δ, H, L y F existe un valor $\beta \in (L, H]$, tal que cuando el vendedor llega a la conclusión de que el beneficio del comprador es menor que β con probabilidad 1, entonces el vendedor ofrece L.

Basta con probar el resultado para el caso en que el comprador se enfrenta a un vendedor que juega la estrategia (¡subóptima!) de aceptar cualquier precio que sea menor que el valor de su beneficio b. Si el vendedor está dispuesto a ofrecer L cuando el comprador acepta cualquier $p < b$, entonces también va a estar dispuesto a hacerlo cuando el comprador es más sofisticado y tiene menos tendencia a aceptar. Supongamos que, dada la historia de la negociación, el vendedor conjetura que el beneficio del comprador se distribuye según F truncada en el intervalo $[L, b_t)$, donde $b_t \in [L, H]$. Sea $M(p)$ la máxima utilidad que el vendedor puede esperar, dadas sus conjeturas, ofreciendo el precio p a un comprador que acepta siempre que $p < b$. Esto es,

$$M(p) = p\frac{[F(b_t) - F(p)]}{F(b_t)} + \delta \int_{[L,p)} z\frac{f(z)}{F(b_t)}dz$$

derivando respecto a p, tenemos

$$M'(p) = \frac{[F(b_t) - F(p)] + pf(p)(\delta - 1)}{F(b_t)}$$

Si b_t toma un valor suficientemente próximo a L, $M'(p)$ es negativo para todo p en $[L, b_t]$. (Nótese que el supuesto de que $L > 0$ es crucial, puesto que de lo contrario el término $pf(p)(\delta - 1)$ no es negativo necesariamente.) Es decir, lo mejor que el vendedor puede hacer es ofrecer el precio mínimo, L, inmediatamente. Esto prueba la existencia de β. Entonces para cada historia tiene que haber un número finito de períodos N tal que, si el vendedor ve rechazadas todas sus propuestas hasta $N - 1$, asignara probabilidad solamente a $b \leqslant \beta$. Sea N el número de períodos necesarios para llegar a la conclusión de que $b_t \leqslant \beta$ desde el período inicial en que $b_0 = H$.

Los resultados 1, 2 y 3 son suficientes para probar la siguiente proposición.

Proposición 2 (Fudenberg, Levine y Tirole, 1985)

Sea $L > 0$, entonces existe un único ES.

La demostración es bastante intrincada por lo que vamos a presentar solamente un esquema del razonamiento principal. Se trata básicamente de un argumento de inducción hacia atrás.

Consideraremos juegos en los que imponemos artificialmente que la negociación termine con probabilidad 1 antes de determinada fecha n con la propuesta L. Usaremos la notación p^i para indicar la propuesta del vendedor cuando quedan i períodos para la conclusión del juego. Para cada negociación con parámetros (δ, L, H, F), y cada $\xi \in (L, H]$ sea (δ, L, ξ, F_ξ) el juego en que la distribución ex-ante de b es F_ξ, donde $F_\xi(b) = F(b)/F(\xi)$ si $b < \xi$, y $F_\xi(b) = 1$ si $b \geqslant \xi$.

Supongamos que le imponemos al vendedor la condición de que la negociación debe acabar en un solo período con la propuesta L. Por el resultado 3 sabemos que en el caso de que la distribución a priori sea tal que $H = \beta$, esta restricción no condiciona la decisión del vendedor porque su opción óptima es proponer Len cualquier caso. Es decir, proponer L inmediatamente es la única sucesión de precios de equilibrio.

Sea H_2 el máximo valor de ξ tal que el vendedor ofrece L en el juego (δ, L, ξ, F_ξ) y sea p^2 el máximo precio que un comprador de tipo H^2 está dispuesto a aceptar cuando espera la propuesta L en el período siguiente. Esto es, $(H^2 - p^2) = \delta(H^2 - L)$. Consideremos el juego en el que restringimos las propuestas del vendedor de forma que su primera propuesta sea menor que p^2, y calculamos la estrategia que maximiza la utilidad del vendedor dada esta restricción. Sabemos que si $H^2 = H$ entonces el vendedor ofrecerá L en el primer período. Es decir, puesto que la restricción no condiciona la decisión del vendedor, tenemos un equilibrio para el juego sin restricción.

Seguidamente calculamos H_3, el máximo valor de ξ para que el vendedor ofrezca la sucesión (p^2, L), y p^3 tal que $(H^3 - p^3) = \delta(H^3 - p^2)$. Inductivamente calculamos H^n y p^n, etc. Para cada n calculamos la propuesta para el primer período que maximiza la utilidad del vendedor sujeto a la restricción de que debe ser menor que p^n, la estrategia construida así es única (genéricamente). Puesto que el juego termina en un número finito de períodos N con la propuesta L, la restricción $p^N \leqslant p^N$ es irrelevante y, por lo tanto, tenemos un equilibrio para el juego sin restricciones.

En el supuesto de que $L = 0$, la construcción que acabamos de describir no puede funcionar porque no existe una cota máxima a la duración de la negociación. La existencia de un ES en el caso $L = 0$ puede probarse tomando una sucesión de juegos con parámetros (δ, L_n, H, F) con $L_n > 0$ tal que $\text{lím}_{n \to \infty} L_n = 0$. La única sucesión de ES tiene límite, y éste es un ES del juego límite, pero la unicidad no se mantiene en el límite.

Refinamientos del ES

Grossman y Perry (1986) analizan el juego en el que se permite hacer propuestas al comprador. Su línea de ataque consiste en proponer un nuevo concepto de equilibrio, el Equilibrio Secuencial Perfecto (ESP), en el que se restringen de forma drástica las reglas de revisión de las conjeturas.

Veamos en qué consiste un ESP. En primer lugar, se generaliza el concepto de estrategia. Una estrategia no se define como una norma de decisión para cada historia, sino como una norma de decisión para cada historia y para cada conjetura que el jugador pueda sostener dada aquella historia. Seguidamente se restringen las conjeturas como sigue. Supongamos que, dada la historia de la negociación el vendedor tiene conjeturas con soporte $[L, b_t]$, y supongamos que observa una propuesta p^* que en principio el comprador no debería de hacer en equilibrio. Entonces el vendedor debe preguntarse: ¿Existe algún subconjunto K de $[L, b_t]$ tal que, si yo creo que la propuesta ha surgido de algún comprador cuyo beneficio es $b \in K$ y actuó en consecuencia, entonces solamente un comprador tal que $b \in K$ va a tener interés en proponer p^*? Para cualquier desviación del equilibrio, si existe un conjunto K, entonces el vendedor debe actualizar sus conjeturas tomando la probabilidad condicional al suceso $b \in K$. Si no existe un conjunto K, entonces el vendedor puede hacer cualquier conjetura siempre que no asigne probabilidad a ningún $b \notin [L, b_t]$.

A lo largo de un ESP el proceso de negociación es como sigue. El vendedor propone p_1, el comprador acepta p_1 solamente si $b \in [b_a, H] = A_1$, $b_a \in [L, H)$. Si $b \in [b_b, b_a) = B_1$, $b_b \in [L, b_a)$, la contrapropuesta es p_2, un precio que el vendedor acepta. Si $b \in [L, b_b) = C_1$, la contrapropuesta es inaceptable para el vendedor. Si el vendedor observa que el comprador rechaza su propuesta y hace una contrapropuesta que es inaceptable, entonces el vendedor revisa sus conjeturas de acuerdo con F truncada en b_b. El proceso se repite hasta que se llega a un acuerdo. Para cada ronda de la negociación, hay una partición del soporte de las conjeturas $\{A_t, B_t, C_t\}$ tal que: el vendedor propone p_t, el comprador acepta (si $b \in A_t$), o rechaza y propone p_{t+1} aceptable (si $b \in B_t$), o rechaza y propone algo inaceptable (si $b \in C_t$). La sucesión de propuestas y contrapropuestas que son aceptables es decreciente, y, en general, para llegar a un acuerdo hacen falta varias rondas de negociación.

El resultado más importante de Grossman y Perry (1986) es que si existe algún ESP, y $L > 0$, entonces éste es único. Sin embargo, un ESP no siempre existe. En particular, una condición necesaria para la existencia de un ESP es que δ esté acotado superiormente por algún valor $\mu < 1$. Es decir, se trata de un análisis que no nos sirve para estudiar procesos de negociación en los que las ofertas pueden sucederse a gran velocidad.

El resultado de la negociación cuando $\delta \to 1$

Los resultados de nuestro análisis van a depender siempre de la forma extensiva que propongamos. En principio, no parece deseable que los elementos más arbitrarios de la forma extensiva, quién hace la primera propuesta, o la longitud de un período, tengan demasiado peso sobre el resultado. Por ello parece natural considerar que δ toma valores cercanos a 1.

Gul, Sonnenschein y Wilson (1986), y Gul y Sonnenschein (1988) analizan las propiedades asintóticas, cuando $\delta \to 1$, del juego en el que el beneficio del comprador es información privada. Demuestran que en cualquier ES que cumpla ciertas condiciones de estacionaridad, cuando $\delta \to 1$, la fecha del acuerdo se aproxima a 0 y el precio se aproxima a L. Es decir, aun cuando existan muchos ES, en el límite, el resultado predecido es único: el acuerdo es inmediato y en las mejores condiciones para el jugador que posee información privada.

Este resultado, que se presenta para el caso en el que el vendedor hace todas las ofertas en Gul, Sonnenschein y Wilson (1986), y se generaliza para el juego con ofertas alternadas en Gul y Sonnenschein (1988), pone en cuestión la validez de los modelos en los que solamente un jugador posee información privada para analizar el fenómeno de los retrasos en la negociación.

Consideremos el caso en el que el vendedor hace todas las ofertas. Sea $\{p_t\}$ una sucesión de precios de equilibrio, y sea $\{b_t\}$ la sucesión de valores de b tales que, si el comprador tiene un beneficio b_t, entonces es indiferente entre aceptar p_t, o esperar y aceptar p_{t+1}. Sea $V(t)$ el valor esperado del juego para el vendedor, dado que la negociación ha llegado al período t. Sea Δ la duración de un período, esto es $\delta = e^{-r\Delta}$. Supongamos que la estrategia del comprador es estacionaria en el siguiente sentido: si un comprador acepta p_t en fecha t, entonces también acepta si el vendedor ofrece p_t antes de t. El vendedor puede acelerar el proceso de negociación ofreciendo p_{t+1} en t. Hacer esto tiene un coste y un beneficio. El coste es igual a $(p_t - p_{t+1})[F(b_{t-1}) - F(b_t)]$, la diferencia en el precio por la probabilidad de que el precio más alto, p_t, hubiera sido aceptado. El beneficio es el interés que el vendedor obtiene al obtener $V(t+1)$ en t, esto es $rV(t+1)$. Supongamos que la tasa de interés por período es del 100 por 100. En equilibrio, el coste de acelerar la negociación debe ser mayor que su beneficio, es decir

$$(p_t - p_{t+1})[F(b_{t-1}) - F(b_t)] \geqslant V(t+1)$$

dividiendo por Δ^2, obtenemos

$$\frac{p_t - p_{t+1}}{\Delta}\frac{F(b_{t-1}) - F(b_t)}{\Delta} \geqslant \frac{V(t+1)}{\Delta^2}$$

En equilibrio la tasa de variación del precio por unidad de tiempo tiene que estar acotada, de lo contrario cualquier comprador esperaría un período. Esto es, $\text{lím}_{\Delta\to 0}\,[(p_t - p_{t+1})/\Delta] < \infty$. Si, además, $\text{lím}_{\Delta\to 0}\,[F(b_{t-1}) - F(b_t)]/\Delta < \infty$, entonces, o bien p_t está en su valor mínimo, L, o bien $V(t+1)$ tiene que aproximarse a 0. Es decir, p_t se aproxima a 0. Supongamos que $\text{lím}_{\Delta\to 0}\,[F(b_{t-1}) - F(b_t)]/\Delta \to \infty$. En este caso, para asegurar que el comprador acepta p_t con probabilidad positiva cuando el coste de esperar es negligible, el vendedor tiene que estar ofreciendo el mínimo precio posible, L. Por lo tanto, cuando $\Delta \to 0$, las propuestas del vendedor tienen que estar arbitrariamente próximas a L. En consecuencia, el acuerdo se realiza arbitrariamente rápido.

Para concluir esta sección, merece la pena mencionar un modelo en el que se obtienen retrasos en tiempo real con información privada sólo en un lado. Admati y Perry (1987) proponen la siguiente forma extensiva. Cada vez que uno de los jugadores hace una propuesta, su contrincante puede reaccionar inmediatamente aceptando o rechazando y haciendo una contrapropuesta, o puede esperar tanto tiempo como él desee. Mientras el contrincante está esperando, el primer jugador no puede retirar ni revisar su propuesta. Con esta forma extensiva, aun cuando en principio la negociación puede realizarse a gran velocidad, el vendedor puede comprometerse a tardar un intervalo de tiempo sustancial en rebajar sus propuestas: esto le permite discriminar y obtener un precio más alto si el comprador tiene un beneficio alto. En equilibrio, hay retrasos y el vendedor obtiene en promedio un precio mayor que L.

5. Información privada en ambos lados

El resultado de Gul, Sonnenschein y Wilson sugiere que el análisis de los procesos de negociación en los que ocurren retrasos pasa en gran medida por el estudio de modelos en los que hay información privada en ambos lados. Esto es, también s, el coste del producto para el vendedor, es una variable aleatoria cuyo valor solamente él observa. Sin embargo, el análisis de estos modelos es extraordinariamente complejo y hasta el momento los resultados presentes en la literatura son escasos e insatisfactorios.

Cramton (1984a, b) presenta un modelo en el que un vendedor y un comprador cuyos costes y beneficios pueden tomar valores en el intervalo [0, 1] intentan ponerse de acuerdo en un precio al que transferir un objeto. El análisis se centra en el límite cuando, $\Delta \to 0$, del juego en el que el vendedor y el comprador alternan ofertas. Cramton prueba la existencia de un ES totalmente revelador. Esto es, las acciones de los jugadores revelan totalmente cuál es el valor de su coste o su beneficio. Un comprador (resp. vendedor) cuyo beneficio (resp. coste) es más alto (resp. bajo) revela su tipo más temprano que uno cuyo beneficio (resp. coste) es más bajo (resp. alto). Cuando una de las partes ha revelado su tipo, el juego sigue con un ES del juego con información privada sólo en un lado. Para sostener un ES de estas características, los jugadores deben usar estrategias que no son estacionarias: para cada jugador la decisión de aceptar o no una propuesta no depende exclusivamente de sus conjeturas y de la propuesta, sino que hay otros elementos de la historia de la negociación que también son relevantes. Un ES perfectamente revelador no puede sostenerse con estrategias estacionarias porque, por el resultado de Gul, Sonnenschein y Wilson, el jugador que revela su tipo obtiene una utilidad igual a cero. Evidentemente, ningún jugador va a estar dispuesto a revelar su tipo si el pago por hacerlo es cero.

En un artículo reciente Cramton (1987) usa la forma extensiva de Admati y Perry para probar la existencia de un ES estacionario totalmente revelador.

Simplificar la forma extensiva del juego ha dado algunos resultados interesantes (véase Chatterjee y Samuelson, 1987, Kreps y Wilson, 1982). No obstante, la simplificación es muy drástica: reducir el número de precios a solamente dos, un precio alto p^2y un precio bajo p^1. Con esta estructura, el problema del vendedor (resp. comprador) queda reducido a elegir una fecha en la que, si la negociación todavía sigue, aceptar p^1 (resp. p^2). Si existe información privada en ambos lados, de forma que con cierta probabilidad el vendedor no puede aceptar p^1 y, con cierta probabilidad, el comprador no puede aceptar p^2, entonces existe un único Equilibrio de Nash (EN). A lo largo del único EN el proceso de negociación dura un intervalo de tiempo positivo independientemente de cuál sea la duración de un período.

Supongamos que la negociación se realiza en tiempo continuo, los jugadores puede decidir rendirse en cualquier $t \in [0, \infty)$. El juego termina tan pronto como alguien se rinde. Supongamos que el beneficio del comprador se distribuye según F con densidad positiva f en $[b_L, b_H]$, $b_L < p^2 < b_H$, y el coste del vendedor se distribuye según G con densidad positiva g en $[s_L, s_H]$, $s_L < p^1 < s_H$. Al igual que en los apartados anteriores, suponemos que las preferencias de los jugadores sobre acuerdos (p^i, t) se representan por funciones de utilidad, $(p^i - s)e^{-rt}$ para el vendedor y $(b - p^i)e^{-rt}$ para el comprador.

Una estrategia para el vendedor (resp. comprador) es una decisión sobre en qué fecha rendirse dado valor de s (resp. b). Cada estrategia induce una distribución de probabilidad sobre la fecha de concesión. Sea $S(t)$ (resp. $B(t)$) la probabilidad de que el vendedor (resp. comprador) conceda en el intervalo $[0, t]$ inducida por su estrategia. Un par de estrategias que generan S^* y B^* forman un EN si, dado que el comprador (resp. vendedor) se rinde según la distribución B^* (resp. S^*), la decisión que maximiza el valor esperado del vendedor (resp. comprador) para cada s (resp. b) induce la distribución S^* (resp. B^*).

Puede probarse (Ponsati, 1988) que en un EN, S^* y B^* son diferenciables y tienen el mismo soporte. También puede probarse que, si la probabilidad de que un jugador se rinda en $t = 0$ es positiva, entonces la probabilidad de que lo haga su oponente es 0.

Nótese que si $s > p^1$ (resp. $b < p^2$), el vendedor (resp. comprador) no se rinde nunca. Puesto que esto sucede con cierta probabilidad, sabemos que S^* y B^* asignan probabilidad positiva al intervalo $(0, T)$ para algún T, $0 < T \leqslant \infty$.

En un EN que genera (B^*, S^*), un comprador cuyo beneficio es b elige la fecha de concesión t_b que maximice

$$U(t, b, S^*) = \int_{[0,t)} (b - p^1)e^{-r\tau}dS^*(\tau) + (1 - S^*(t)(b - p^2)e^{-rt}$$

Análogamente, un vendedor cuyo coste es s elige la fecha de concesión t_s que maximice

$$U(t, s, B^*) = \int_{[0,t)} (p^2 - s)e^{-r\tau}dB^*(\tau) + (1 - B^*(t))(p^1 - s)e^{-rt}$$

Para valores interiores de t_b y t_s es necesario que se cumplan las siguientes condiciones de primer orden:

$$(p^2 - p^1)dS^*(t) = r(b - p^2)(1 - S^*(t))$$

y

$$(p^2 - p^1)\mathrm{d}B^*(t) = r(p^1 - s)(1 - B^*(t))$$

Puede probarse que, para $t > 0$, la correspondencia que asignan cada par s, con t_s (resp. cada b con t_b) es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente). Sean s^* y b^* las inversas de tales funciones, es decir, para cada $t > 0$, $s^*(t)$ (resp. $b^*(t)$) es el coste del vendedor (resp. beneficio del comprador) que le induce a rendirse en fecha t. Para caracterizar S^* y B^* en $(0, T)$ basta caracterizar s^* y b^*. Puesto que $S(t) = G(s^*(t))$ y $B(t) = 1 - F(b^*(t))$, $dS(t) = g(s^*(t))s^{*\prime}(t)$ y $dB(t) = -f(b^*((t))b^{*\prime}(t)$. Sustituyendo en las condiciones de primer orden, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$s^{*\prime}(t) = \frac{r(b^*(t) - p^2)(1 - G(s^*(t)))}{(p^2 - p^1)g(s^*(t))}$$

$$b^{*\prime}(t) = \frac{r(p^1 - s^*(t))F(b_t)}{(p^2 - p^1)\,\mathrm{f}\,(b^*(t))}$$

El siguiente procedimiento nos proporciona condiciones iniciales para resolver el sistema. Calculamos la curva Π tal que, para cada t, $b^*(t) = \Pi(s^*(t))$. Es fácil probar que $\lim_{t \to T} s^*(t) = p^1$ y $\lim_{t \to T} b^*(T) = p^2$. Por lo tanto, Π se obtiene como la única solución a la ecuación diferencial $\Pi'(s) = (p^1 - s)F(b)g(s) \div (b - p^2)(1 - G(s)f(b)$, tal que $\Pi(p^1) = p^2$. Sabemos que como máximo uno de los jugadores concede en 0 con alguna probabilidad, es decir, que o bien, $\lim_{t \to 0} b^*(t) = b_H$, o bien, $\lim_{t \to 0} s^*(t) = s_L$. Puesto que $\lim_{t \to 0} b^*(t) = \Pi(\lim_{t \to 0} s^*(t))$, si $\Pi(s_L) \leqslant b_H$, entonces $\lim_{t \to 0} b^*(t) = \Pi(s_L)$ y si $\Pi(s_L) \geqslant b_H$, entonces $\lim_{t \to 0} s^*(t) = \lambda - 1(b_H)$. Con esta condición inicial obtenemos un único par de funciones s^* y b^* que caracterizan el único EN posible. Finalmente, puede probarse que efectivamente s^* y b^* caracterizan un par de estrategias que son un EN.

Eliminando la posibilidad de que los jugadores lleguen a una solución de compromiso, hemos eliminado los problemas relacionados con la transmisión de información a través de las propuestas de los jugadores. El resultado obtenido es muy fuerte, pero cabe preguntarse hasta qué punto es un resultado relevante para el problema de la negociación ya que la posibilidad de llegar a un compromiso parece un elemento esencial de cualquier negociación.

6. Conclusiones

Hemos presentado modelos que analizar situaciones de negociación mediante instrumentos de la teoría de juegos.

El modelo axiomático de Nash (1950, 1953) es el primer estudio del problema desde la perspectiva de teoría de juegos. La Solución de Nash, que cabe interpretar como la propuesta que sugeriría un árbitro neutral teniendo en cuenta las posibilidades estratégicas de cada jugador, se caracteriza de forma axiomática. Nash enuncia una serie de axiomas que parece razonable exigir a la solución y demuestra que hay un único par de utilidades consistente con tales axiomas.

Gran parte de la literatura más reciente comparte el enfoque secuencial-estratégico del modelo de Rubinstein (1982). Dos individuos impacientes alternan, a lo largo del tiempo, propuestas sobre cómo repartirse un pastel. Aunque en principio cualquier reparto del pastel puede ser un Equilibrio de Nash (EN), el juego tiene un único Equilibrio Perfecto en los Subjuegos (EPS). El resultado de este equilibrio es un acuerdo inmediato. La división del pastel depende solamente del grado de impaciencia de cada jugador y de quién hace la primera propuesta. Si ambos jugadores son igualmente impacientes, cuando las propuestas pueden sucederse muy rápidamente, el resultado se aproxima a la Solución de Nash.

El enfoque que la literatura ha tomado para estudiar los retrasos e ineficiencias de los procesos de negociación ha consistido en analizarlos como juegos secuenciales con información incompleta. Esta área de la literatura sufre, por el momento, las dificultades inherentes al concepto de ES. El problema permanece en gran medida abierto.

Bibliografía

ADMATI, A. R., y PERRY, M. (1987), «Strategic Delay in Bargaining», *Review of Economic Studies* 54: 345-364.

BINMORE, K. (1980-I), «Nash Bargaining theory I», ICERD-London School of Economics D. P. 80-9.

BINMORE, K. (1980-II), «Nash Bargaining Theory II», ICERD-London School of Economics D. P. 80-14.

CRAMTON, P. C. (1984a), «The Role of Time and Information in Bargaining» (mimeo, Standford University).

CRAMTON, P. C. (1984b), «Bargaining with Incomplete Information: An Infinite Horizon Model with Continuous Uncertainty», *Review of Economic Studies* 51: 579-594.

CRAMTON, P. C. (1985), «Sequential Bargaining Mechanisms», en Roth, A. E. (ed.) *Game Theoretic Models of Bargaining* (Cambridge, Cambridge University Press).

CRAMTON, P. C. (1987), «Strategic Delay in Bargaining with Two-Siced Uncertainty», Yale School of Organization and Management Working Paper #36.

CHATTERJEE, K., y SAMUELSON, W. F. (1987), «Bargaining with Two-sided Incomplete information», *Review of Economic Studies* 54: 175-192.

FUDENBERG, D.; LEVINE, D., y TIROLE, J. (1985), «Infinite Horizon Models of Bargaining with Incomplete Information», en Roth, A. E. (ed.) *Game Theoretic Models of Bargaining* (Cambridge, Cambridge University Press), 73-98.

FUDENBERG, D., y TIROLE, J. (1983), «Sequential Barganing under Incomplete Information», *Review of Economic Studies* 50: 221-248.

GROSSMAN, S., y PERRY, M. (1986), «Sequential Bargaining under Asymmetric Information», *Journal of Economic Theory* 39: 120-154.

GUL, F., y SONNENSCHEIN, H. (1988), «On Delay in Bargaining with one-sided uncertainty», de próxima publicación en *Econometrica.*

GUL, F.; SONNENSCHEIN, H., y WILSON, R. B. (1986), «Foundations of Dynamic Monopoly and the Coase Conjecture», *Journal of Economic Theory* 39: 155-190.

KREPS, D. M., y WILSON, R. B. (1982a), «Reputation and Imperfect Information», *Journal of Economic Theory* 27: 553-579.

LUCE, R. D., y RAIFFA, H. (1957), *Games and Decisions,* Wiley.

MYERSON, R., y SATTERTHWAITE, M. (1983), «Efficiente Mechanisms for Bilateral Trading», *Journal of Economic Theory* 29: 265-281.

NASH, J. F. (1950), «The Bargaining Problem», *Econometrica* 18: 155-162.

NASH, J. F. (1953), «Two Person Cooperative Games», *Econometrica* 21: 128-140.

PERRY, M. (1986), «An example of price formation in bilateral situations: a bargaining model with incomplete information», *Econometrica* 54: 313-322.

PONSATI, C. (1988), «Incomplete information Two Person Bargaining with a Finite Set of Possible Agreements», Ph. D. Thesis, University of Minnesota.

ROTH, A. E. (1979), «Axiomatic Models of Bargaining», *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,* 170 (Berlin, Springer Verlag).

RUBINSTEIN, A. (1982), «Perfect Equilibrium in a Bargaining Model», *Econometrica* 50: 97-109.

RUBINSTEIN, A. (1985), «A Bargaining model with Incomplete Information», *Econometrica* 53: 1151-1172.

SOBEL, J., y TAKAHASHI, I. (1983), «A Multistage Model Bargaining», *Review of Economic Studies* 50: 411-426.